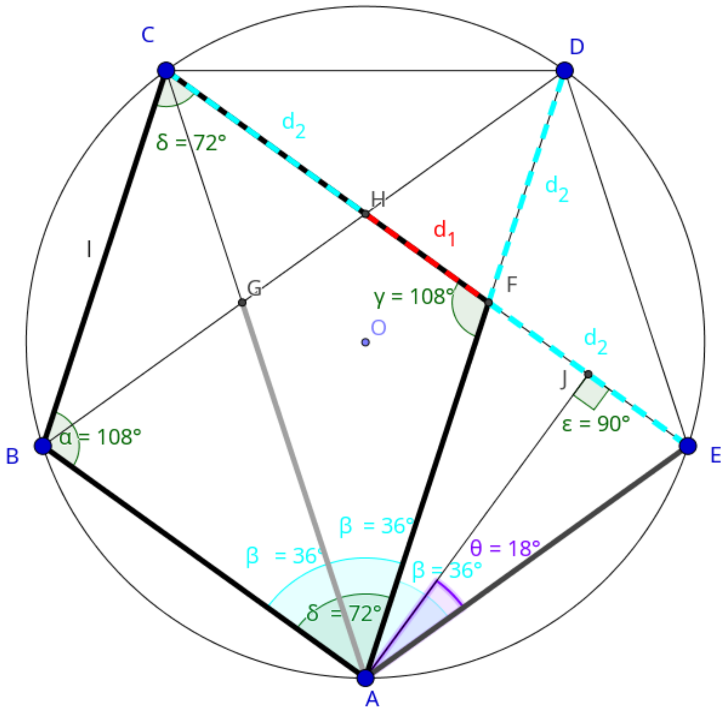
Angles et longueurs dans un pentagone

Irrationalité du nombre d'or



$5 \cdot \alpha = 5 \cdot 180° - 360°$, donc

$$\alpha = \frac{5 \cdot 180° - 360°}{5} = 108°$$

$2 \cdot \alpha + 2 \cdot \delta = 360°$ donc $\delta = 72°$

$\beta + \delta = 108°$ donc $\beta = 36°$

$d_1 + d_2 = 1$ et $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{d_2}{1}$ donc $d_2^2 = d_1 = 1 - d_2$

$d_2^2 + d_2 - 1 = 0$ donc $d_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618033989$

$\sin(18°) = \dfrac{d_2}{2}$ donc

$$\mathbf{\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309017}$$

On a plusieurs autres propriétés intéressantes dans le pentagone.

$d_1 = 1 - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}381966$; $d_2 + d_1 + d_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$ qui est le **nombre d'or**.

On trouve : $\sin(18°) = \dfrac{\frac{1}{2}}{d_2 + d_1 + d_2} = \dfrac{1}{\text{la moitié du nombre d'or}}$

$\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\cdot(3-\sqrt{5})}{9-5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ on retrouve le nombre d'or.

Ce qui précède permet en passant de montrer qu'il est irrationnel: en supposant que la longueur d'une grande diagonale $2d_2 + d_1$ et la longueur d'un côté 1 sont tous les deux multiples entier d'une « petite longueur **e** », on aurait : $d_2 + d_1 + d_2$ et $d_2 + d_1$ seraient aussi multiple de cette petite longueur **e**.
On retrouve un pentagone avec d_2 comme longueur d'une grande diagonale et d_1 comme longueur d'un côté.
En recommençant la construction d'un plus petit pentagone dans le précédent, on crée des pentagones de plus en plus petits ayant tous des longueurs multiples de la « petite longueur **e** ».
Ceci mène à une contradiction, car les dimensions des pentagones construits auront forcément une fois des longueurs plus petites que la « petite longueur **e** ».