Valeurs exactes de sin(3°) et cos(3°)

$$\sin(3°) = \frac{2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right) + \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}$$

$$\cos(3°) = \frac{2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) + \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{16}$$

Il n'est pas possible d'exprimer les valeurs exactes de : sin(1°) ; cos(1°) ; sin(2°) et cos(2°)

Rappels :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\gamma)}{2}} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\gamma)}{2}} \quad \text{et} \quad \cos(\gamma) = \sqrt{1-\sin^2(\gamma)}$$

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$; $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ sin(18°) est calculé dans la vidéo suivante.

En mettant au carré, on vérifie que : $2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$ et $2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$

De ce qui précède, on en déduit que :

$$\sin(15°) = \sqrt{\frac{1-\cos(30°)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$\cos(15°) = \sqrt{1-\sin^2(15°)} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{4-2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$\cos(18°) = \sqrt{1-\sin^2(18°)} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{16-5+2\cdot\sqrt{5}-1}}{4} = \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}$$

En résumé :

$$\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \;;\; \cos(18°) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} \;;$$
$$\sin(15°) = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4} \;;\; \cos(15°) = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Calculons :

$$\sin(3°) = \sin(18° - 15°) = \sin(18°)\cdot\cos(15°) - \cos(18°)\cdot\sin(15°)$$

$$\sin(3°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\sin(3°) = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{3}+1) - 2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{3}-1)}{16}$$

Dans la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=GldJWGojFcs

il obtient : $\sin(3°) = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$

Pour le cosinus :

$$\cos(3°) = \cos(18° - 15°) = \cos(18°)\cdot\cos(15°) + \sin(18°)\cdot\sin(15°)$$

$$\cos(3°) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\cos(3°) = \frac{2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{3}+1) + \sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{3}-1)}{16}$$

J'ai vérifié par calculs que toutes ces expressions donnent bien les valeurs de sin(3°) et de cos(3°), avec un précision de 17 chiffres. Le programme python est donné en fin de fichier.

Autre vidéo déterminant le sinus de 3°.
C.f. : https://www.youtube.com/watch?v=PGvYdE7sQfI

Autre expressions exactes de sinus et cosinus d'angles, en utilisant :

$$\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2(\alpha)$$

$$\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \ = \ \sin(18°) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$$
$$\cos(18°) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} \ = \ \cos(18°) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos(36°) = 2\cdot\cos^2(18°) - 1 = 2\cdot\frac{\left(5+\sqrt{(5)}\right)}{8} - 1 = \frac{5+\sqrt{(5)}-4}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.8090169943749475$$
$$\sin(36°) = \sqrt{1-\cos^2(36°)} = \sqrt{\frac{16-(6+2\cdot\sqrt{5})}{16}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \approx 0.5877852522924731$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\gamma)}{2}} \ ; \ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\gamma)}{2}}$$

$$\cos(9°) = \cos\left(\frac{18°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}}$$

$$\sin(9°) = \sin\left(\frac{18°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}}$$

sin(6°) = sin(2 * 3°) = 2 * sin(3°) * cos(3°)   compliqué !

$$\sin(6°) = \sin(36°-30°) = \sin(36°)\cdot\cos(30°) - \cos(36°)\cdot\sin(30°)$$
$$\sin(6°) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}-1-\sqrt{5}}{8}$$

$$\cos(6°) = \cos(36°-30°) = \cos(36°)\cdot\cos(30°) + \sin(36°)\cdot\sin(30°)$$
$$\cos(6°) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos^2(6°) = \frac{14+2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{32}$$
$$\cos(12°) = 2\cdot\cos^2(6°) - 1 = = \frac{-2+2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$$

sin(12°) = sin(2 * 6°) = 2 * sin(6°) * cos(6°)   compliqué, sans grand intérêt.

Curiosité :
Formule permettant de calculer récursivement le carré du sinus de la moitié d'un angle, connaissant le carré du sinus de l'angle. Le calcul récursif est stable. Dans l'autre sens, il est un peu instable.

$$\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\cos(\gamma)}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2(\gamma)}}{2} \quad ; \quad \sin^2(\gamma) = 1-\left(1-2\cdot\sin^2(\gamma)\right)^2$$

```python
'''
Code python pour vérifier numériquement la validité des formules exprimant
le sinus et le cosinus de divers angles
'''

import math

print(" ****** Angle 3° *******")

x = 3 * math.pi/180

s3  = math.sqrt(2) * ( math.sqrt(5) - 1 ) * ( math.sqrt(3) + 1 )
s3 -= 2 * math.sqrt(5 + math.sqrt(5) )    * ( math.sqrt(3) - 1 )
s3  = s3 / 16
print(s3, math.sin(x), s3 - math.sin(x))

c3  = 2 * math.sqrt(5 + math.sqrt(5) )    * ( math.sqrt(3) + 1 )
c3 += math.sqrt(2) * ( math.sqrt(5) - 1 ) * ( math.sqrt(3) - 1 )
c3  = c3 / 16
print(c3, math.cos(x), c3 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 6° *******")

x = 6 * math.pi/180

s6  = math.sqrt(2) * math.sqrt(3) * math.sqrt(5 - math.sqrt(5) )
s6 -= 1 + math.sqrt(5)
s6  = s6 / 8
print(s6, math.sin(x), s6 - math.sin(x))

c6  = math.sqrt(3) * (1 + math.sqrt(5) )
c6 += math.sqrt(2) * math.sqrt(5 - math.sqrt(5) )
c6  = c6 / 8
print(c6, math.cos(x), c6 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 9° *******")

x = 9 * math.pi/180

s9  = math.sqrt( (4 - math.sqrt(2) * math.sqrt(5 + math.sqrt(5) ) ) / 8 )
print(s9, math.sin(x), s9 - math.sin(x))

c9  = math.sqrt( (4 + math.sqrt(2) * math.sqrt(5 + math.sqrt(5) ) ) / 8 )
print(c9, math.cos(x), c9 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 12° *******")

x = 12 * math.pi/180

c12  = -2 + 2 * math.sqrt(5)
c12 += math.sqrt(2) * math.sqrt(3) * (1 + math.sqrt(5) ) * math.sqrt(5 - math.sqrt(5) )
c12  = c12 / 16
print(c12, math.cos(x), c12 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 15° *******")

x = 15 * math.pi/180

s15  = math.sqrt(2) * (math.sqrt(3) - 1 ) / 4
print(s15, math.sin(x), s15 - math.sin(x))

c15  = math.sqrt(2) * (1 + math.sqrt(3) )/4
print(c15, math.cos(x), c15 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 18° *******")

x = 18 * math.pi/180

s18  = (math.sqrt(5) - 1 ) / 4
print(s18, math.sin(x), s18 - math.sin(x))

c18  = math.sqrt(2) * math.sqrt(5 + math.sqrt(5) )/4
print(c18, math.cos(x), c18 - math.cos(x))

print(" ****** Angle 36° *******")

x = 36 * math.pi/180

s36  = math.sqrt( (5 - math.sqrt(5) ) / 8)
print(s36, math.sin(x), s36 - math.sin(x))

c36  = (1 + math.sqrt(5) )/4
print(c36, math.cos(x), c36 - math.cos(x))
```

```
print(" ****** Calcul récursif d'angles / 2^n à partir de 30° *******")

x = 30 * math.pi/180
s2 = math.sin(x)**2

for nn in range(15):
    s2 = (1 - math.sqrt(1 - s2)) / 2
    x = x / 2
    print(nn, x*180 / math.pi, math.sqrt(s2), math.sin(x), math.sqrt(s2) - math.sin(x))

# Repart dans l'autre sens, pour tester la stabilité
print(" ---- dans l'autre sens ----")

for nn in range(15):
    s2 = 1 - (1 - 2*s2)**2
    x = x * 2
    print(nn, x*180 / math.pi, math.sqrt(s2), math.sin(x), math.sqrt(s2) - math.sin(x))


print()
print(" ****** Calcul récursif d'angles à partir de 3° *******")
print(" *****  Ce calcul est stable ! Pas d'accumulation d'erreurs d'arrondi  *****")

x0 = 3 * math.pi/180
s0 = math.sin(x0)
c0 = math.cos(x0)

x  = x0
s1 = s0
c1 = c0

print(1, x*180 / math.pi, s1, math.sin(x), s1 - math.sin(x))

for nn in range(2, 16):
    s1, c1 = s1 * c0 + c1 * s0, c1 * c0 - s1 * s0 # formule d'addition d'angles
    x = nn * x0
    print("{:5d}".format(nn), "{:4.1f}".format(x*180 / math.pi), s1, math.sin(x), s1 - math.sin(x))


print()
print(" ****** Calcul récursif d'angles à partir de 3° / 128 *******")
print(" *****  Ce calcul est stable ! Pas trop d'accumulation d'erreurs d'arrondi  *****")
# Est une méthode qui aurait pu être utilisée pour calculer des tables de sinus et cosinus à la main,
# avant l'apparition de l'analyse, qui est plus efficace.
# En combinant avec les calculs de la boucle précédente, on arrive a éviter des pertes de précision de
calculs.

x0 = 3/128 * math.pi/180
s0 = math.sin(x0)   # Est calculable à la main avec une dizaine d'extractions de racines carrées
c0 = math.cos(x0)

x  = x0
s1 = s0
c1 = c0

for nn in range(2, 2049):
    s1, c1 = s1 * c0 + c1 * s0, c1 * c0 - s1 * s0 # formule d'addition d'angles
    x = nn * x0
    if ((nn % 128) == 0):
        print("{:5d}".format(nn), "{:4.1f}".format(x*180 / math.pi), s1, math.sin(x), s1 - math.sin(x))
```