`Résolution de l'équation du 3ème degré : $\boxed{y^3+a\,y^2+b\,y+c=0}$, avec a, b et c des nombres réels.

<u>Résumé des solutions.</u>

On pose : $\boxed{y=x-\frac{a}{3}}$. On obtient : $x^3-3\,p\,x-2q=0$, avec $\boxed{p=\frac{a^2}{9}-\frac{b}{3}}$ et $\boxed{q=\frac{a\,b}{6}-\frac{a^3}{27}-\frac{c}{2}}$.

On pose : $\boxed{\Delta=q^2-p^3}$.

On obtient des solution : $\boxed{x=\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}}$.

<u>Explicitons les solutions dans les trois cas des valeurs de</u> : $\Delta=0$; $\Delta>0$ et $\Delta<0$.

<u>Cas 1</u>, où : $\Delta=q^2-p^3=0$

Il y a deux solutions $\in\mathbb{R}$, une qui est une racine double.

La racine simple est : $\boxed{x=2\cdot\sqrt[3]{q}}$.

La racine double est : $\boxed{x=-\sqrt[3]{q}}$ qui est de signe opposé.

Le décalage $y=x-\frac{a}{3}$ peut rendre toutes les racines négatives ou toutes positives.

<u>Cas 2</u>, où : $\Delta=q^2-p^3>0$ $\quad x^3-3\,p\,x-2q=0$

Il y a une solution $\in\mathbb{R}$, et deux solutions complexes conjuguées.

Notons : $\sqrt[3]{+}=\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt[3]{-}=\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}$

La racine réelle est : $\boxed{x=\sqrt[3]{+}+\sqrt[3]{-}}$.

Une racine complexe est : $\boxed{x=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+}+\sqrt[3]{-}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+}-\sqrt[3]{-}\right)}$.

L'autre racine complexe est : $\boxed{x=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+}+\sqrt[3]{-}\right)-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+}-\sqrt[3]{-}\right)}$.

<u>Cas 3</u>, où : $\Delta=q^2-p^3<0$ (donc p doit être positif) $\quad x^3-3\,p\,x-2q=0$

Il y a trois solutions $\in\mathbb{R}$.

Notons : $r=p\cdot\sqrt{p}$ et utilisons l'une des trois définition équivalente de θ : $(\theta\in[0;180°[)$

$\theta=\arccos\left(\frac{q}{r}\right)$.

$\theta=\arcsin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{r}\right)$ si $q\geq 0$ et $\theta=180°-\arcsin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{r}\right)$ si $q<0$.

$\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{q}\right)$ si $q>0$ et $\theta=180°+\arctan\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{q}\right)$ si $q<0$ et $\theta=90°$ si $q=0$.

Les trois racines réelles sont : $\boxed{x=\sqrt[3]{r}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}+k\cdot 120°\right)}$, $k=0,1,2$.

À la fin, on obtient les solutions : $y=x-\frac{a}{3}$.

Exemple 1 :

Résolution de : $x^3 - 2x - 4 = 0$, $a = 0$; $p = \frac{a^2}{9} - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}$; $q = \frac{a\,b}{6} - \frac{a^3}{27} - \frac{c}{2} = 2$;

$\Delta = q^2 - p^3 = 4 - \frac{8}{27} = \frac{100}{27}$. Avec $x = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}$

Cela donne : $x = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}}$.

Cela n'est pas évident, mais le résultat est $x = 2$. L'explication est donnée deux pages plus loin.

Méthode itérative plus simple et plus efficace :
$x_0 = 2{,}5$ c'est la partie difficile, trouver une approximation de départ.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 4}{3x_n^2 - 2}$$

$x_1 = 2{,}104...$; $x_2 = 2{,}006...$; $x_3 = 2{,}00002...$; $x_4 = 2{,}0000000002...$; $x_5 = 2$.
C'est très facile à programmer et à calculer avec une calculatrice ayant la touche "OP1".

Par division polynomiale, on obtient : $x^3 - 2x - 4 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 2)$.

Les deux autres solutions, complexes, se trouvent en résolvant : $x^2 + 2x + 2 = 0$. $x = -1 \pm i$

On peut aussi utiliser la théorie précédente pour obtenir les deux solutions complexes :

$$\sqrt[3]{+} = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \quad ; \quad \sqrt[3]{-} = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{+} + \sqrt[3]{-} \right) \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{+} - \sqrt[3]{-} \right) = -1 \pm i .$$

Cherchons à montrer que $x = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} = 2$ en le mettant au cube.

$$x^3 = 2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3} + 2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \right)$$

$$x^3 = 4 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{4 - \frac{100}{81} \cdot 3} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \right)$$

$$x^3 = 4 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} \right)$$

$x^3 = 4 + 2 \cdot x$ on retrouve l'équation de départ, mais cela ne montre pas que $x = 2$.
On peut juste vérifier que $x = 2$ est solution de l'équation.

L'explication est donnée deux pages plus loin, de manière plus générale.

Exemple 2 : $x^3 - 3\,p\,x - 2q = 0$

Résolution de : $x^3 - 75x - 250 = 0$, $a = 0$; $p = 25$; $q = 125$; $\Delta = q^2 - p^3 = 125^2 - 25^3 = 0$

Ce qui donne : $x = 2 \cdot \sqrt[3]{q} = 2 \cdot \sqrt[3]{125} = 10$ et

la racine double est : $x = -\sqrt[3]{q} = -\sqrt[3]{125} = -5$

On vérifie que : $x^3 - 75x - 250 = (x-10) \cdot (x+5)^2$

Exemple 3 : $x^3 - 3\,p\,x - 2q = 0$

On connaît la formule de trigonométrie : $\cos(3 \cdot \theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)$

Notons $x = \cos(\theta)$ et prenons $\theta = 20°$, donc $\cos(3\theta) = \cos(60°) = 0.5$

Pour trouver la valeur de $x = \cos(20°)$, résolvons l'équation : $4x^3 - 3x = 0.5$.

Divisons par 4 pour avoir la forme standard : $x^3 - \frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{8} = 0$.

$a = 0$; $p = \frac{a^2}{9} - \frac{b}{3} = \frac{1}{4}$; $q = \frac{a\,b}{6} - \frac{a^3}{27} - \frac{c}{2} = \frac{1}{16}$;

$\Delta = q^2 - p^3 = \frac{1}{256} - \frac{1}{64} = -\frac{3}{256}$ qui est négatif, donc il y a 3 solutions réelles.

$$r = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{q}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1}{16} \cdot 8\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

Les racines sont : $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot 2 \cdot \cos(20° + k \cdot 120°)$, $k = 0, 1, 2$.

$x = \cos(20° + k \cdot 120°)$, $k = 0, 1, 2$.

On voit que pour calculer le cos(20°) en résolvant une équation du 3ème degré, il faut calculer le cos(20°). On tourne en rond, il n'y a eu aucun progrès !

Exemple 4 : $x^3 - 3\,p\,x - 2q = 0$

Résolution de : $(x-5) \cdot (x+1) \cdot (x+4) = x^3 - 21x - 20 = 0$, $a = 0$; $p = 7$; $q = 10$;

$\Delta = q^2 - p^3 = 10^2 - 7^3 = -243$. $\Delta < 0$, donc cas 3).

$r = p \cdot \sqrt{p} = 7 \cdot \sqrt{7}$

$\theta = \arccos\left(\frac{q}{r}\right) = \arccos\left(\frac{10}{7 \cdot \sqrt{7}}\right) \approx 57.3198°$ Les trois solutions sont réelles :

$$x_1 = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 5$$

$$x_2 = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3} + 120°\right) = -4$$

$$x_3 = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3} + 240°\right) = -1$$

C'est une manière compliquée d'obtenir un résultat simple.

Montrons encore une tentative de résolution de l'équation du troisième degré $x^3 - 3px - 2q = 0$, qui *échouera*, mais qui exprime un nombre simple, par exemple entier, en terme compliqué utilisant une somme de racines cubique contenant des racines carrées.
Cherchons les valeurs de t et v telles que :

$P(x) = x^3 - 3px - 2q = 0 = (x-2t)\cdot(x+t+iv)\cdot(x+t-iv)$ Donc :

$P(x) = (x-2t)\cdot((x+t)^2+v^2) = (x-2t)\cdot(x^2+2tx+t^2+v^2)$

$P(x) = x^3-(3t^2-v^2)\cdot x-2t\cdot(t^2+v^2)$

On a donc : $p = t^2-\frac{v^2}{3}$ et $q = t\cdot(t^2+v^2)$

Isolons : $v^2 = 3t^2-3p$ et substituons dans : $q = t\cdot(t^2+3t^2-3p)$, $q = t\cdot(4t^2-3p)$

Cela donne l'équation : $q = 4t^3 - 3pt$

Multiplions par 2 et arrangeons : $(2t)^3 - 3p(2t)-2q = 0$, on retombe sur l'équation de départ.
Ce n'est donc pas intéressant.

Plus surprenant est la suite suivante.
<u>Elle donne plusieurs expressions compliquées pour exprimer des nombres simples.</u>
Utilisons la solution de l'équation $P(x) = x^3-(3t^2-v^2)\cdot x-2t\cdot(t^2+v^2) = 0$, cas 2 :

On a donc : $p = t^2-\frac{v^2}{3}$ et $q = t\cdot(t^2+v^2)$

$$\Delta = q^2 - p^3 = t^2\cdot(t^2+v^2)^2-\left(t^2-\frac{v^2}{3}\right)^3 = v^2\cdot\left(3\cdot t^4+\frac{2}{3}\cdot t^2\cdot v^2+\frac{v^4}{27}\right) = \frac{v^2}{27}\cdot(81\cdot t^4+2\cdot 9\cdot t^2\cdot v^2+v^4)$$

$$\Delta = \frac{v^2}{27}\cdot(9\cdot t^2+v^2)^2 = \frac{v^2}{81}\cdot(9\cdot t^2+v^2)^2 \cdot 3 = v^2\cdot\left(t^2+\frac{v^2}{9}\right)^2 \cdot 3$$

$$\boxed{\sqrt{\Delta} = v\cdot\left(t^2+\frac{v^2}{9}\right)\cdot\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{x = \sqrt[3]{t\cdot(t^2+v^2) + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{t\cdot(t^2+v^2) - \sqrt{\Delta}}}$$

Il semble étonnant que la valeur de x ci-dessus est indépendante de v et vaut toujours $2t$.
J'ai vérifié cela numériquement sur plusieurs exemples.
Voici des exemples

1) $\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\cdot\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\cdot\sqrt{3}} = 2$ (t=1 ; v=1) ; 2) $\sqrt[3]{10+6\cdot\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\cdot\sqrt{3}} = 2$ (t=1 ; v=3)

3) $\sqrt[3]{16+\frac{80}{9}\cdot\sqrt{3}} + \sqrt[3]{16-\frac{80}{9}\cdot\sqrt{3}} = 4$ (t=2 ; v=2) ; 4) $\sqrt[3]{30+\frac{82}{9}\cdot\sqrt{3}} + \sqrt[3]{30-\frac{82}{9}\cdot\sqrt{3}} = 6$ (t=3 ; v=1)

<u>Explication :</u> avec $w = \frac{v}{\sqrt{3}}$, donc $3w = v\cdot\sqrt{3}$ et $3w^2 = v^2$ et $w^3 = \frac{v^3}{9}\cdot\sqrt{3}$

donc $\boxed{\sqrt{\Delta} = 3\cdot w\cdot t^2+w^3}$

$t\cdot(t^2+v^2) + \sqrt{\Delta} = t^3 + 3\cdot t\cdot w^2 + 3\cdot t^2\cdot w + w^3 = t^3 + 3\cdot t^2\cdot w + 3\cdot t\cdot w^2 + w^3 = (t+w)^3$ et

$t\cdot(t^2+v^2) - \sqrt{\Delta} = (t-w)^3$

En substituant dans l'expression de x on trouve bien que $x = 2t$.

<u>Montrons comment on trouve les solutions.</u>

Résolution de l'équation du 3ème degré : $\boxed{y^3+a\,y^2+b\,y+c=0}$, avec a, b et c des nombres réels.

On commence par poser : $\boxed{y=x-\frac{a}{3}}$.

Je m'éloigne un petit peu des standards, pour simplifier l'écriture.

En substituant, on obtient : $x^3-3\,p\,x-2q=0$, avec $\boxed{p=\frac{a^2}{9}-\frac{b}{3}}$ et $\boxed{q=\frac{a\,b}{6}-\frac{a^3}{27}-\frac{c}{2}}$.

On pose $x=u+v$, pour obtenir : $u^3+v^3+3(u\,v-p)\cdot(u+v)-2q=0$

Que l'on peut résoudre en posant : $u\cdot v=p$ donc $u^3\cdot v^3=p^3$ et $u^3+v^3=2\,q$.

En multipliant la deuxième égalité par u^3, et en substituant la première égalité on obtient :

$(u^3)^2-2q\cdot u^3+p^3=0$ de même que $(v^3)^2-2q\cdot v^3+p^3=0$.

Ce sont des équations du deuxièmes degrés pour u^3 et v^3.

$u^3=q+\sqrt{q^2-p^3}$ et $v^3=q-\sqrt{q^2-p^3}$

On pose : $\Delta=q^2-p^3$

On obtient des solution : $\boxed{x=\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}}$

On s'arrête souvent ici, mais ce n'est pas satisfaisant.

Cela ne fournit qu'une seule solution et que faire lorsque $\Delta=q^2-p^3$ est négatif ?

<u>Une justification à posteriori est de vérifier la solution donnée dans le résumé en page 1.</u>

$x^3=\left(\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}\right)^3$ équation à résoudre : $x^3-3\,p\,x-2q=0$

$x^3=q+\sqrt{\Delta}+q-\sqrt{\Delta}+3\cdot\left(\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}\cdot\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}\right)$

$x^3=2q+3\cdot\sqrt[3]{q^2-\Delta}\cdot x=2q+3\cdot\sqrt[3]{q^2-q^2+p^3}\cdot x=2q+3\,p\,x$

On retrouve l'équation de départ.

Justifions le cas 1) où : $\Delta = q^2 - p^3 = 0$

Si $\Delta = 0$, alors : ($q^2 = p^3$, p est positif). $\boxed{x = \sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}}$

Une racine est : $x = 2\cdot\sqrt[3]{q} \in \mathbb{R}$.

L'autre racine, qui est double et réelle s'obtient par :

$$x = e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}\cdot\sqrt[3]{q} + e^{-i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}\cdot\sqrt[3]{q} = \left(e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}} + e^{-i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{q} = 2\cdot\cos(120°)\cdot\sqrt[3]{q} = -\sqrt[3]{q}$$

On peut vérifier :

$$\left(x-2\cdot\sqrt[3]{q}\right)\cdot\left(x+\sqrt[3]{q}\right)^2 = \left(x-2\cdot\sqrt[3]{q}\right)\cdot\left(x^2+2\cdot\sqrt[3]{q}\cdot x+\sqrt[3]{q^2}\right) = x^3 + 0\cdot x^2 + \left(\sqrt[3]{q^2}-4\cdot\sqrt[3]{q^2}\right)\cdot x - 2\cdot\sqrt[3]{q^3}$$

$= x^3 - 3\cdot\sqrt[3]{q^2}\cdot x - 2\cdot q = x^3 - 3px - 2q$, car $q^2 = p^3$. Les solutions finales : $y = x - \frac{a}{3}$.

La somme des racines donne 0, cela doit être vérifié, car le facteur de x^2 est nul.

Justifions le cas 2) où : $\Delta = q^2 - p^3 > 0$ $\boxed{x = \sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}}$

Si $\Delta = q^2 - p^3 > 0$, alors : $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$.

Notons : $\sqrt[3]{+} = \sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt[3]{-} = \sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}$

La racine réelle est : $\boxed{x = \sqrt[3]{+} + \sqrt[3]{-}}$. Elle vérifie l'équation de départ, cela a été fait dans la justification à posteriori de la page précédente.

Remarque : $e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, qui mis au cube donne 1.

Les racines complexes sont : $x = e^{\pm i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}\cdot\sqrt[3]{+} + e^{\mp i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}\cdot\sqrt[3]{-}$, que l'on peut vérifier être les zéros recherchés.

$$x = \left(-\frac{1}{2} \pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{+} + \left(-\frac{1}{2} \mp i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{-}$$

En séparant les parties réelles des parties complexes, on obtient :

$\boxed{x = -\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+} + \sqrt[3]{-}\right) \pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{+} - \sqrt[3]{-}\right)}$ Les solutions finales : $y = x - \frac{a}{3}$.

Justifions le cas 3) où : $\Delta = q^2 - p^3 < 0$ (donc p doit être positif) $\boxed{x = \sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{\Delta}}}$

Il y a trois solutions $\in \mathbb{R}$, mais les calculs font intervenir deux racines cubiques de nombres complexes. La solution usuellement donnée est : $x = \sqrt[3]{q + i\cdot\sqrt{|\Delta|}} + \sqrt[3]{q - i\cdot\sqrt{|\Delta|}}$.

Cette écriture est ambiguë, car elle fait intervenir la racine cubique d'un nombre complexe, qui n'est pas bien définie. Explicitions la solution. Notons : $r = \sqrt{q^2+|\Delta|} = \sqrt{q^2+p^3-q^2} = p\cdot\sqrt{p}$.

$$x = \sqrt[3]{r}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{q}{r}+i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta|}}{r}} + \sqrt[3]{\frac{q}{r}-i\cdot\frac{\sqrt{|\Delta|}}{r}}\right) = \sqrt[3]{r}\cdot\left(\sqrt[3]{e^{i\cdot(\theta+k\cdot 2\pi)}} + \sqrt[3]{e^{-i\cdot(\theta+k\cdot 2\pi)}}\right),\ k = 0, 1, 2$$

$$x = \sqrt[3]{r}\cdot\left(e^{i\cdot\left(\frac{\theta}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\cdot\left(\frac{\theta}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}\right) \quad x = \sqrt[3]{r}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$$

θ est tel que $\cos(\theta) = \frac{q}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{r}$. Donc $\theta = \arccos\left(\frac{q}{r}\right)$. À la fin : $y = x - \frac{a}{3}$

<u>L'approche plus standard est la suivante, qui est presque la même que celle précédente :</u>

Résolution de l'équation du 3ème degré : $\boxed{y^3+a\,y^2+b\,y+c=0}$

On commence par poser : $\boxed{y=x-\frac{a}{3}}$.

En substituant, on obtient : $x^3+p\,x+q=0$, avec $\boxed{p=b-\frac{a^2}{3}}$ et $\boxed{q=\frac{2a^3}{27}-\frac{a\,b}{3}+c}$.

On pose $x=u+v$, pour obtenir : $u^3+v^3+(3\,u\,v+p)\cdot(u+v)+q=0$

Que l'on peut résoudre en posant : $u^3\cdot v^3=-\frac{p^3}{27}$ et $u^3+v^3=-q$.

En multipliant la deuxième égalité par u^3, et en substituant la première égalité on obtient :

$(u^3)^2+q\cdot u^3-\frac{p^3}{27}=0$ de même que $(v^3)^2+q\cdot v^3-\frac{p^3}{27}=0$.

Ce sont des équations du deuxièmes degrés pour u^3 et v^3.

$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ et $v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

Finalement, on obtient une ou des solution(s) : $\boxed{x\ =\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ +\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$